İ.Ü. MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
ROBOTİĞE GİRİŞ FİNAL SINAV SORULARI 30.12.2015

Sınav süresi **90** dakikadır. **Tüm soruları cevap kağıdı üzerinde yapınız**. Cevaplar okunaklı ve anlaşılır olarak yazılmalıdır. Aksi takdirde yapılanlar dikkate alınmayacaktır. Başarılar dilerim.
Doç.Dr. Yunus Ziya Arslan

Öğrenci Adı:
Numarası:

SORU 1. Aşağıda görülen 3 serbestlik dereceli robotun;

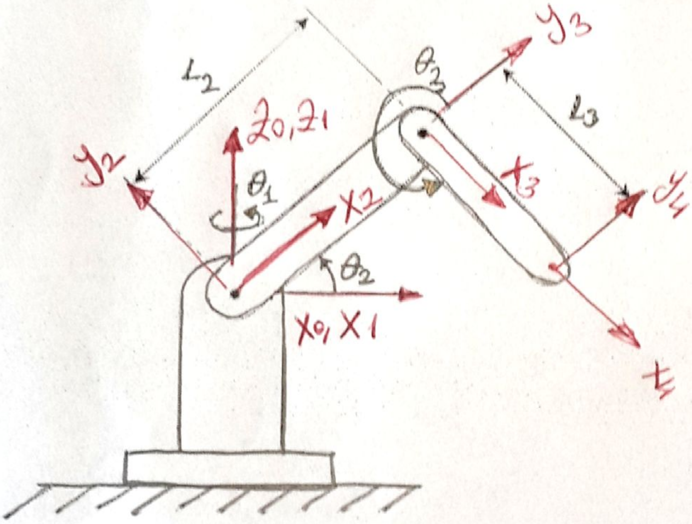
i) Koordinat eksenlerini, şekil üzerinde, ilgili eklemlere yerleştirerek Denativit Hartenberg parametrelerini elde ediniz. Koordinat eksenlerini, robotların üzerlerinde belirtilen tüm parametreleri işleme katacak şekilde yerleştiriniz. **Kendiniz parametre atamayınız.**

ii) Robotun eklem açılarını ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) bildiğimiz varsayılırsa düz (forward) kinematik analiz yolu ile (transformasyon matrislerini kullanarak) uç noktanın pozisyonunu (P_x, P_y, P_z) bulunuz.

iii) Robotun uç noktasının pozisyonunu ve oryantasyonunu bildiğimiz varsayılırsa ters (inverse) kinematik analiz yolu (transformasyon matrislerini kullanarak) ile eklem açılarını ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) bulunuz.

iv) $\{0\}$. Frame göre Jacobian'ını (${}^0J(\theta)$) elde ediniz.

Cevap i.



DH Parametreleri

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90	0	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3
4	0	L_3	0	0

15 puan

Not: Homojen transformasyon matrisi

$$
{}^{i-1}_{\;\;i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}_{4}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T \cdot {}^{3}_{4}T
$$

$$
{}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} C_{23} \cdot C_1 & -S_{23} \cdot C_1 & S_1 & C_1 \{L_3 C_{23} + L_2 C_2\} \\ C_{23} S_1 & -S_{23} \cdot S_1 & -C_1 & S_1 \{L_3 C_{23} + L_2 C_2\} \\ S_{23} & C_{23} & 0 & L_3 S_{23} + L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}
$$

Bilinen değerler...

(ii) Robotun uç noktasının pozisyonu:

$P_x = C_1 \{L_3 C_{23} + L_2 C_2\}$

$P_y = S_1 \{L_3 C_{23} + L_2 C_2\}$

$P_z = L_3 S_{23} + L_2 S_2$

15 puan

$$r_{13} = S_1$$
$$-r_{23} = C_1$$
$$\rightarrow \theta_1 = \mathrm{Atan2}(r_{13}, -r_{23})$$

5 puan

$$C_1 \{L_3 C_{23} + L_2 C_2\} = P_x$$

$$\rightarrow L_3 \underbrace{C_{23}}_{r_{32}} + L_2 C_2 = \frac{P_x}{C_1}$$

$$\rightarrow L_2 C_2 = \frac{P_x}{C_1} - L_3 r_{32} \rightarrow C_2 = \left(\frac{P_x}{C_1} - L_3 r_{32}\right) / L_2$$

$$S_2 = \pm\sqrt{1 - C_2^2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \mathrm{Atan2}(S_2, C_2)$$

5 puan

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_x}{C_1} &= L_3 C_{23} + L_2 C_2 \\ P_z &= L_3 S_{23} + L_2 S_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{P_x^2}{C_1^2} + P_z^2 = L_2^2 + L_3^2 + 2 L_2 L_3 \cos\theta_3$$

$$\cos\theta_3 = \frac{\left(\frac{P_x}{C_1}\right)^2 + P_z^2 - L_2^2 - L_3^2}{2 L_2 L_3}$$

$$\sin\theta_3 = \pm\sqrt{1 - C_3^2}$$

$$\rightarrow \theta_3 = \mathrm{Atan2}(\sin\theta_3, \cos\theta_3)$$

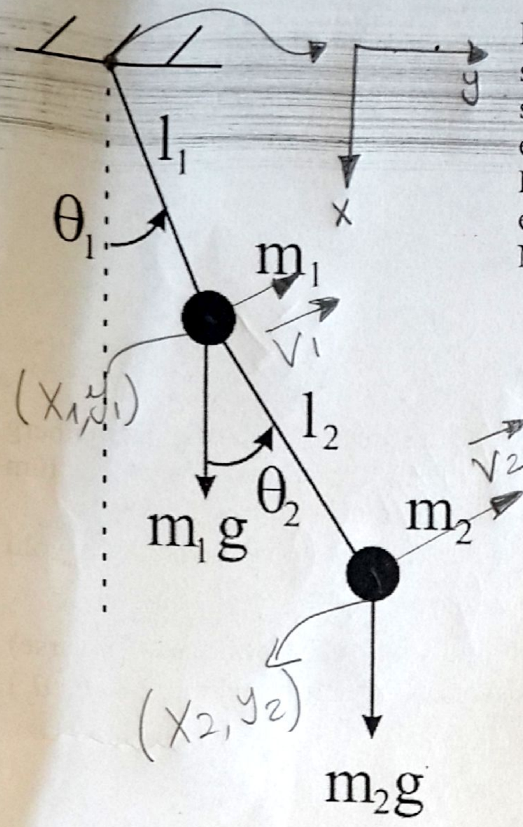
5 puan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -S_1(L_3C_{23} + L_2C_2) & -C_1\{L_3S_{23} + L_2S_2\} & -C_1L_3S_{23} \\ C_1(L_3C_{23} + L_2C_2) & -S_1(L_3S_{23} + L_2S_2) & -S_1L_3S_{23} \\ 0 & L_3C_{23} + L_2C_2 & L_3C_{23} \end{bmatrix}$$

15 puan

SORU 2.



Düzlemsel hareket eden şekildeki iki serbestlik dereceli çift sarkaç (double pendulum), m_1 ve m_2 kütlelerinde eklemlere sahiptir. Sarkaçtaki linklerin (uzuvların) kütleleri ihmal edilmiştir. Şekilde verilen parametreleri kullanarak Lagrange Yöntemi ile çift sarkacın hareket denklemini elde ediniz.

Not: Eklemleri noktasal kütle olarak kabul ediniz.

$$K = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$P = m_1 g (l_1 - l_1 \cos\theta_1) + m_2 g (l_1 + l_2 - l_1 C_1 - l_2 C_2)$$

$$x_1 = l_1 C_1 \rightarrow \dot{x}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 S_1$$

$$y_1 = l_1 S_1 \rightarrow \dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 C_1$$

$$V_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$x_2 = l_1 C_1 + l_2 C_2 \rightarrow \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 S_1 - l_2 \dot{\theta}_2 S_2$$

$$y_2 = l_1 S_1 + l_2 S_2 \rightarrow \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 C_1 + l_2 \dot{\theta}_2 C_2$$

$$V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 S_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 S_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S_1 S_2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 C_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 C_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 C_1 C_2$$

$$V_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$ 5 puan

$$K = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right)$$

$$P = m_1 . g . l_1 (1 - \cos\theta_1) + m_2 g \{ l_1 (1 - C_1) + l_2 (1 - C_2) \}.$$ 5 puan

$q_1 = \theta_1$ için

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\theta_1} = m_1 l_1^2 \dot\theta_1 + m_2 l_1^2 \dot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta_1}\right) = (m_1+m_2) l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \left\{\ddot\theta_2 \cos(\theta_2-\theta_1) + \dot\theta_2 (\dot\theta_2 - \dot\theta_1) \sin(\theta_1-\theta_2)\right\}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_1} = m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_1} = m_1 g\, l_1 \sin\theta_1 + m_2 g\, l_1 \sin\theta_1 = (m_1+m_2) l_1 g \sin\theta_1$$

$\Rightarrow$ 1. Hareket denklemi...

$$(m_1+m_2) l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_2 \cos(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2 (\dot\theta_2 - \dot\theta_1) \sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$- m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_2-\theta_1) + (m_1+m_2) l_1 g \sin\theta_1 = 0$$

Her terimi l_1 ile bölünürse:

$$(m_1+m_2) l_1 \ddot\theta_1 + m_2 l_2 \ddot\theta_2 \cos(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_2 \dot\theta_2^2 \sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$+ (m_1+m_2) g \sin\theta_1 = 0$$

15 pen

$q_2 = \theta_2$ için:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\theta_2} = m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_2-\theta_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 (\dot\theta_2 - \dot\theta_1) \sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_2} = m_2 g\, l_2 \sin\theta_2$$

→ 2. Hareket denklemi :

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) \sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$- m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2) + m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0$$

Her taraf l_2 ile sadeleştirilirse:

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$+ m_2 g \sin\theta_2 = 0$$

15 puan